

Integrasi Numeris dengan Menggunakan Polinomial *Lagrange*

Syawaluddin H¹⁾
 Hang Tuah²⁾
 Widiadnyana Merati²⁾
 Leo Wiryanto²⁾

Abstrak

Pada paper ini disajikan pengembangan integrasi numeris berdasarkan polinomial *Lagrange*. Metoda yang dihasilkan mirip dengan metoda *Gaussian-quadrature*, dengan perbedaan terletak pada pengambilan titik-titik integrasi. Metoda memberikan hasil integrasi yang sangat baik, dengan kesalahan sebesar 0.2% -0.5% pada integrasi fungsi sinusoidal. Metoda yang dihasilkan juga dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial waktu orde 1 dengan hasil yang sangat baik.

Kata-kata kunci : Polinomial *lagrange*.

Abstract

In this paper, a development of a numerical integration method based on *Lagrangian* polynomial is presented. The resulted method like *Gaussian-quadrature's* method, but differs in points of integration sampling. The method gives a very good result in integration of sinusoidal function, with error about 0.2% - 0.5% to exact solution. The method can also be used for solving first order time differential equation, with very good result.

Keywords : *Lagrange* polynomial.

1. Latar Belakang

Metoda integrasi numeris sudah cukup banyak yang dikembangkan, mulai metoda trapezoidal sampai dengan *Gaussian-quadrature*. Dari semua metoda yang ada yang paling mudah pemakaiannya dan memberikan hasil yang cukup baik adalah metoda *Gaussian-quadrature*.

Pada paper ini dikembangkan alternatif metoda integrasi tanpa bermaksud meneliti kelebihan ataupun kekurangan metoda *Gaussian-quadrature*. Metoda integrasi yang dikembangkan adalah berdasarkan fakta bahwa suatu fungsi dapat dinyatakan dalam bentuk lain yang lebih sederhana yaitu dengan polinomial *Lagrange*. Mengingat bentuk polinomial *Lagrange* adalah tetap pada suatu jumlah titik polinomial, maka bila polinomial tersebut dikerjakan pada sistim koordinat kurvilinier dengan domain yang tetap $-1 \leq \xi \leq 1$, maka integrasi polinomial tersebut akan menghasilkan harga yang tetap, yang selanjutnya akan disebut dengan koefisien integrasi.

2. Polinomial *Lagrange*

Pada pasangan data (f_i, x_i) , $i = 1, n$, f dapat didekati dengan polinomial *Lagrange*. Adapun bentuk pendekatan tersebut adalah [Burden, Douglas, 1985]

$$f(x) = \sum_{i=1}^n L_i(x) f_i \quad (2.1)$$

dimana : $L_i(x)$ adalah polinomial *Lagrange* dengan bentuk

$$L_i(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)(x_i - x_3) \dots (x_i - x_n)}$$

$$L_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad (2.2)$$

Dengan demikian integrasi suatu

$$\prod_{i=1, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_j) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2) \dots (x_i - x_j) \dots (x_i - x_n)}$$

1. Staf Pengajar Departemen Teknik Sipil FTSP-ITB.
2. Staf Pengajar Departemen Teknik Sipil FTSP-ITB.
2. Staf Pengajar Departemen Teknik Sipil FTSP-ITB.
2. Staf Pengajar Departemen Matematika FMIPA-ITB.

fungsi $F(x)$, dimana integrasi secara analitik tidak dimungkinkan maka dapat dilakukan langkah berikut. Berdasarkan fungsi $F(x)$ yang diketahui dapat dibuat pasangan data $\{F_i, x_i\}$, $i = 1, n$, pada $a \leq x_i \leq b$, dimana a dan b adalah batas-batas integrasi. Langkah berikutnya adalah mendekati $F(x)$ dengan polinomial *Lagrange* menggunakan data set $\{F_i, x_i\}$.

$$F(x) = f(x) = \sum_{i=1}^n L_i(x_i) F_i \quad (2.3)$$

Sedangkan integrasi menjadi

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \sum_{i=1}^n L_i(x) F_i dx \quad (2.4)$$

integrasi pada **Persamaan (2.4)** dapat dengan mudah diselesaikan mengingat $L_i(x)$ berbentuk polinomial. Pada sistem koordinat ξ , polinomial *Lagrange* berbentuk

$$F(\xi) = \sum_{i=1}^n L_i(\xi) F(\xi_i) \quad (2.5)$$

sedangkan integrasinya menjadi

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi &= \sum_{i=1}^n L_i(\xi) F(\xi_i), \text{ atau} \\ \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi &= \int_{-1}^1 L_1(\xi) d\xi F(\xi_1) + \int_{-1}^1 L_2(\xi) d\xi F(\xi_2) + \int_{-1}^1 L_3(\xi) d\xi F(\xi_3) \\ &\quad + \int_{-1}^1 L_n(\xi) d\xi F(\xi_n) \end{aligned}$$

3. Pembentukan Koefisien Integrasi

Meskipun integrasi polinomial dapat dengan mudah dilakukan, penggunaan **Persamaan (2.4)** untuk menghitung integrasi suatu fungsi masih kurang praktis, karena setiap kali harus membentuk polinomial *Lagrange* dan mengintegrasikannya. Bila segmen garis $a \leq x_i \leq b$, ditransformasikan ke sistem koordinat kurvilinier (ξ), dengan interval $-1 \leq \xi \leq 1$, maka fungsi transformasi adalah

$$\begin{aligned} x(\xi) &= \frac{b-a}{2} \xi + \frac{b+a}{2} \\ dx &= \frac{b-a}{2} d\xi \end{aligned} \quad (3.1)$$

Selanjutnya fungsi $F(x)$, didekati dengan polinomial

Lagrange dalam system koordinat ξ , yaitu

$$F(x) = \sum_{i=1}^n L_i(\xi) F_i \quad (3.2)$$

Integrasi $F(x)$ menjadi

$$\int_a^b F(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^n L_i(\xi) F_i d\xi \quad (3.3)$$

Integrasi $\int_{-1}^1 L_i(\xi) d\xi$ dapat dengan mudah

diselesaikan dan mempunyai harga yang tetap, misal C_i , maka **Persamaan (3.3)** menjadi

$$\int_a^b F(x) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n C_i F_i \quad (3.4)$$

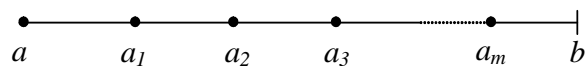
dimana :

$$C_i = \int_{-1}^1 L_i(\xi) d\xi$$

Untuk menambah ketelitian, dapat saja interval (a, b) dibagi-bagi lagi dalam sejumlah sub interval, hal ini mengingat bahwa

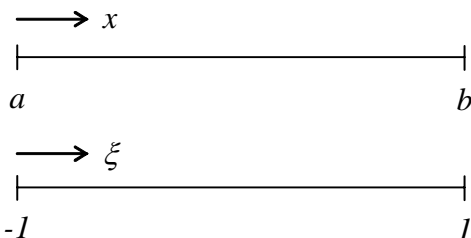
$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^{a_1} F(x) dx + \int_{a_1}^{a_2} F(x) dx + \dots + \int_{a_m}^b F(x) dx$$

dimana $a < a_1 < a_2 < \dots < a_m < b$, atau penjelasan dengan sket



Integrasi numeris dikerjakan pada masing-masing segmen, yaitu

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x) dx &= \frac{a_1-a}{2} \sum_{i=1}^n L_i(\xi) F_i + \frac{a_2-a_1}{2} \sum_{i=1}^n L_i(\xi) F_i + \dots \\ &\quad + \frac{b-a_m}{2} \sum_{i=1}^n L_i(\xi) F_i \end{aligned} \quad (3.5)$$

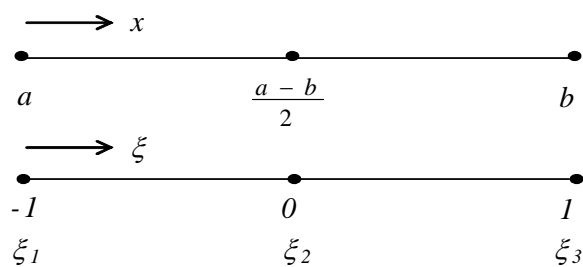


Gambar 3.1. Transformasi sistem koordinat x ke sistem koordinat ξ

Jumlah titik polinomial pada suatu segmen ataupun sub-segmen dapat digunakan 2, 3, 4 n titik polinomial, dimana semakin banyak titik polinomial, akan semakin kecil kesalahannya. Tetapi pada umumnya cukup digunakan polinomial *Lagrange* dengan 3 - 5 titik polinomial. Perhitungan koefisien integrasi dengan 3, 4 dan 5 titik polinomial akan dijelaskan pada bagian berikut.

a. Integrasi dengan 3 titik polinomial

Pada skema ini interval garis $a - b$ dibagi dalam 2 interval, yaitu seperti terlihat pada gambar berikut



Gambar 3.2. Integrasi dengan 3 titik polinomial

Dengan 3 titik polinomial atau titik integrasi tersebut, polinomial *Lagrange* akan berbentuk

$$L_1(\xi) = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} = -\xi(\xi - 1) \quad (3.6)$$

Dengan memasukkan harga $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 0$, dan $\xi_3 = 1$, **Persamaan (3.6)** menjadi

$$L_2(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} = (1 - \xi^2) \quad (3.7)$$

$$L_3(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)} = \xi(\xi + 1) \quad (3.8)$$

Dengan demikian diperoleh koefisien integrasi yaitu

$$C_1 = \int_{-1}^1 L_1(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 -\frac{1}{2} \xi(\xi - 1) d\xi = \frac{1}{3}$$

$$C_2 = \int_{-1}^1 L_2(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 (1 - \xi^2) d\xi = \frac{4}{3}$$

$$C_3 = \int_{-1}^1 L_3(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \xi(\xi + 1) d\xi = \frac{1}{3}$$

Contoh (1) aplikasi integrasi dengan 3 titik polinomial

pada fungsi sinusoidal $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$

Penyelesaian : $x = 0 \quad F_1 = 0; \quad x = \frac{\pi}{4} \quad F_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
 $; x = \frac{\pi}{2} \quad F_3 = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{2} (C_1 F_1 + C_2 F_2 + C_3 F_3) = \frac{\pi}{4}$$

$$\left(\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = 1.002280 \quad \text{Hasil eksak dari } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1, \text{ terlihat hasil numeris}$$

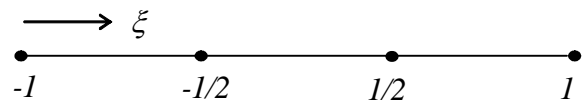
sangat dekat dengan hasil eksak, dengan kesalahan $|1 - 1.002280|100\% = 0.28\%$. Bila $(b-a)$ terlalu besar, maka dapat dibagi lagi dalam sejumlah sub segmen, dan selanjutnya integrasi dilakukan dalam masing-masing sub-segmen yaitu, misal untuk pembagian dalam 2 sub-segmen, integrasi menjadi

$$\int_a^b F(x) \, dx = \int_a^{\frac{b-a}{2}} F(x) \, dx + \int_{\frac{b-a}{2}}^b F(x) \, dx =$$

$$\frac{b-a}{4} \sum_{i=1}^3 C_i F_i + \frac{b-a}{4} \sum_{i=1}^3 C_i F_i$$

b. Integrasi dengan 4 titik polinomial

Pada skema ini interval garis $a - b$ dibagi dalam 3 interval, yaitu



Gambar 3.3. Integrasi dengan 4 titik polinomial

Dengan 4 titik polinomial ini, maka polinomial *Lagrange* berbentuk

$$L_1(\xi) = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_4)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)(\xi_1 - \xi_4)} \quad (3.9a)$$

$$L_2(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_4)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)(\xi_2 - \xi_4)} \quad (3.9b)$$

$$L_3(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_4)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)(\xi_3 - \xi_4)} \quad (3.9c)$$

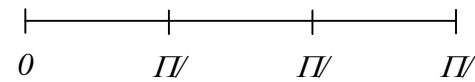
$$L_4(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_4 - \xi_1)(\xi_4 - \xi_2)(\xi_4 - \xi_3)} \quad (3.9d)$$

Dengan memasukkan harga-harga ξ_1 s/d ξ_4 seperti pada **Gambar (3.3)** dan dengan mengintegrasikan dari -1 dan ke 1 , maka diperoleh

$$C_1 = \int_{-1}^1 L_1(\xi) d\xi = 0.25; C_2 = \int_{-1}^1 L_2(\xi) d\xi = 0.75$$

$$C_3 = \int_{-1}^1 L_3(\xi) d\xi = 0.75; C_4 = \int_{-1}^1 L_4(\xi) d\xi = 0.25$$

Contoh (2) integrasi fungsi sinusoidal $\sin x dx$, dengan 4 titik integrasi



$$x = 0 \quad F_1 = \sin 0 = 0.000000; \quad x = \frac{\pi}{6} \quad F_2 = \sin \frac{\pi}{6} = 0.500000$$

$$x = F_3 = \sin = \frac{\pi}{3} \quad 0.866025; \quad x = \frac{\pi}{2} \quad F_4 = \sin = \frac{\pi}{2} = 1.000000$$

$$\int_{-1}^1 F(x) dx = \frac{\pi}{4} (C_1 F_1 + C_2 F_2 + C_3 F_3 + C_4 F_4)$$

$$= \frac{\pi}{4} (0.25 \cdot 0.000000 + 0.75 \cdot 0.500000 + 0.75 \cdot 0.866025 + 0.25 \cdot 1.000000)$$

$$= 1.001005 \quad \text{Kesalahan terhadap hasil eksak adalah } |1 - 1.001005|100\% = 0.1005\%.$$

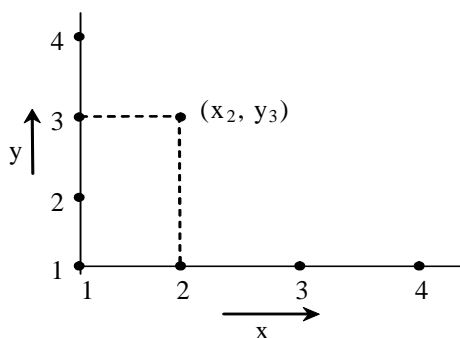
4. Integrasi Bidang

Berdasarkan [Burden, Douglas, 1985], suatu fungsi bidang $F(x, y)$ dapat didekati dengan perkalian polinomial Lagrange, yaitu

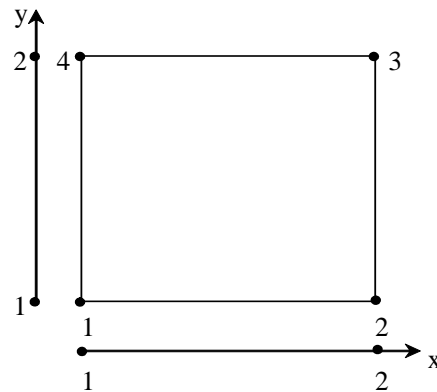
Pada titik (x_2, y_3) pada **Gambar (4.1)**,

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_i(x) L_j(y) F(x_i, y_j) \quad (4.1)$$

maka polinomial Lagrange-nya adalah
 $L_{2,3}(x, y) = L_2(x) L_3(y)$



Gambar 4.1. Polinomial *Lagrange* pada bidang



Gambar 4.2. Polinomial *Lagrange* pada bidang segi empat

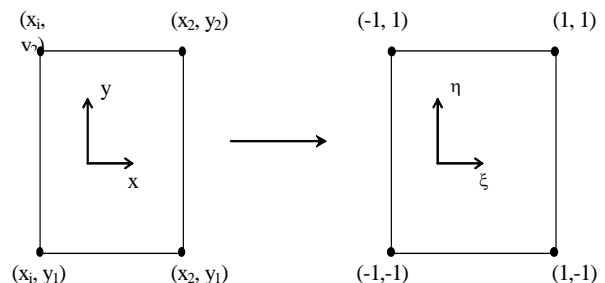
Dengan demikian untuk bidang segi empat seperti fungsi pada **Gambar (4.2)**, maka

$$L_1(x, y) = L_1(x) L_1(y); \quad L_2(x, y) = L_2(x) L_1(y)$$

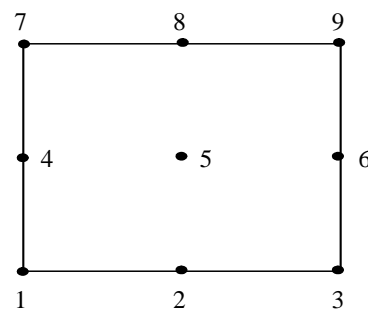
$$L_3(x, y) = L_2(x) L_2(y); \quad L_4(x, y) = L_1(x) L_2(y)$$

Sebagaimana halnya dengan domain satu dimensi, maka pada domain dua dimensi ini juga akan lebih mudah bila digunakan sistem koordinat kurvilinier (ξ, η) .

Bila digunakan polinomial *Lagrange* dengan 3 titik polinomial, baik pada arah ξ maupun η , akan didapat polinomial *Lagrange* dengan titik-titik polinomial



Gambar 4.3 Transformasi dari bidang (x, y) ke bidang ξ, η



Gambar 4.4 Titik-titik polinomial untuk polinomial *Lagrange* 3 titik

sebagai berikut (**Gambar 4.4**)

Pada arah horizontal, arah ξ , terdapat 3 polinomial $L(\xi)$ dan pada arah η juga terdapat 3 buah L

$$L_1(\xi) = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \quad L_1(\eta) = \frac{1}{2} \eta (\eta - 1)$$

$$L_2(\xi) = (1 - \xi^2) \quad L_2(\eta) = (1 - \eta^2)$$

$$L_3(\xi) = \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) \quad L_3(\eta) = \frac{1}{2} \eta (\eta + 1)$$

berdasarkan **Persamaan (3.7)**, **(3.8)**, dan **(3.9)** maka

Dengan demikian polinomial *Lagrange* pada titik-titik polinomial seperti terlihat pada **Gambar 4.4** adalah

$$L_1(\xi, \eta) = L_1(\xi) L_1(\eta); L_2(\xi, \eta) = L_2(\xi) L_1(\eta)$$

$$L_3(\xi, \eta) = L_3(\xi) L_1(\eta); L_4(\xi, \eta) = L_1(\xi) L_2(\eta)$$

$$L_5(\xi, \eta) = L_2(\xi) L_2(\eta); L_6(\xi, \eta) = L_3(\xi) L_2(\eta)$$

$$C_1 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L_1(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{9} \frac{L_7(\xi, \eta) = L_1(\xi)}{L_3(\eta); L_8(\xi, \eta) = L_2(\xi) L_3(\eta)}$$

$$; C_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L_2(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{4}{9} \frac{L_9(\xi, \eta) = L_3(\xi)}{L_3(\eta)}$$

$$C_3 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L_3(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{9} \text{Koefisien integrasi dapat dengan mudah diperoleh dengan}$$

$$; C_4 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L_4(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{4}{9} \text{mengintegrasikan } L_i(\xi, \eta) \text{ pada } \textbf{Persamaan}$$

$$C_5 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L_5(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{16}{9} \text{ sampai } \textbf{(4.1a)} \text{ dengan } \textbf{(4.1i)},$$

$$; C_6 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L_6(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{4}{9}$$

$$C_7 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L_7(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{9}$$

$$; C_8 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L_8(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{4}{9}$$

$$C_9 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L_9(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{9}$$

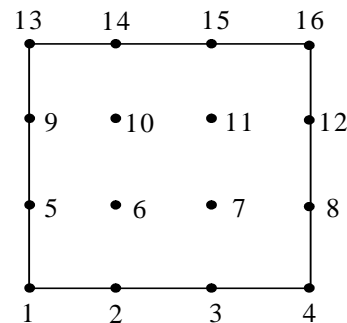
$$\int_{x_l}^{x_2} \int_{y_l}^{y_2} F_9(x) dx dy = \frac{x_2 - x_l}{2} \frac{y_2 - y_l}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^9 L_i(\xi, \eta) F_i d\xi d\eta$$

$$= \frac{x_2 - x_l}{2} \frac{y_2 - y_l}{2} \sum_{i=1}^9 C_i F_i \quad (4.2)$$

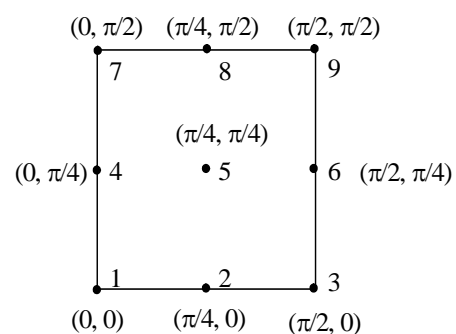
$$\text{dimana } dx = \frac{x_2 - x_l}{2} d\xi \text{ dan } dy = \frac{y_2 - y_l}{2} d\eta.$$

Dengan menggunakan koefisien-koefisien integrasi tersebut maka integrasi pada domain bidang dapat dengan mudah diselesaikan, yaitu sebagai berikut

Dengan cara yang sama, dapat diturunkan koefisien integrasi untuk polinomial *Lagrange* 4 titik polinomial, sehingga pada bidang integrasi akan terdapat 16 titik



Gambar 4.5. Bidang integrasi dengan 16 titik polinomial



Gambar 4.6. Koordinat 9 titik polinomial

polinomial seperti terlihat pada **Gambar (4.5)**.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin y \, dy \, dx = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{2} \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1$$

$$L_i(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta = \frac{\pi^2}{16} \sum_{i=1}^9 C_i F_i$$

Selanjutnya dengan mengintegrasikan masing-masing suku pada polinomial *Lagrange* akan diperoleh harga koefisien integrasi sebagai berikut

$$C_1 = 0.0625 ; C_2 = 0.1875 ; C_3 = 0.1875 ; C_4 = 0.0625$$

$$C_5 = 0.1875 ; C_6 = 0.5625 ; C_7 = 0.5625 ; C_8 = 0.1875$$

$$C_9 = 0.1875 ; C_{10} = 0.5625 ; C_{11} = 0.5625 ; C_{12} = 0.1875$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin y \, dy \, dx = \frac{\pi^2}{16} \sum_{i=1}^{16} C_i F_i \quad C_{13} = 0.0625 ; C_{14} = 0.1875 ; C_{15} = 0.1875 ; C_{16} = 0.0625$$

Contoh (4) : integrasi fungsi sinusoidal $\sin x \sin y \, dx$

Tabel 4.1. Perhitungan contoh (4) dengan 9 titik polinomial

Titik	x	y	$\sin x_i$	$\sin y_i$	F_i	C_i	$C_i F_i$
1	0	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.111111	0.000000
2	$\pi/4$	0	0.000000	0.707107	0.000000	0.444444	0.000000
3	$\pi/2$	0	0.000000	1.000000	0.000000	0.111111	0.000000
4	0	$\pi/4$	0.707107	0.000000	0.000000	0.444444	0.000000
5	$\pi/4$	$\pi/4$	0.707107	0.707107	0.500000	1.777778	0.888889
6	$\pi/2$	$\pi/4$	0.707107	1.000000	0.707107	0.444444	0.314270
7	0	$\pi/2$	1.000000	0.000000	0.000000	0.111111	0.000000
8	$\pi/4$	$\pi/2$	1.000000	0.707107	0.707107	0.444444	0.314270
9	$\pi/2$	$\pi/2$	1.000000	1.000000	1.000000	0.111111	0.111111
							1.004565

Catatan : $F_i = \sin x_i \sin y_i$

Tabel 4.2. Perhitungan contoh (4) dengan 16 titik polinomial

Titik	x	y	$\sin x_i$	$\sin y_i$	F_i	C_i	$C_i F_i$
1	0	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.062500	0.000000
2	$\pi/6$	0	0.500000	0.000000	0.000000	0.187500	0.000000
3	$\pi/3$	0	0.866025	0.000000	0.000000	0.187500	0.000000
4	$\pi/2$	0	1.000000	0.000000	0.000000	0.062500	0.000000
5	0	$\pi/6$	0.000000	0.500000	0.000000	0.187500	0.000000
6	$\pi/6$	$\pi/6$	0.500000	0.500000	0.250000	0.562500	0.140625
7	$\pi/3$	$\pi/6$	0.866025	0.500000	0.433013	0.562500	0.243570
8	$\pi/2$	$\pi/6$	1.000000	0.500000	0.500000	0.187500	0.093750
9	0	$\pi/3$	0.000000	0.866025	0.000000	0.187500	0.000000
10	$\pi/6$	$\pi/3$	0.500000	0.866025	0.433013	0.562500	0.243570
11	$\pi/3$	$\pi/3$	0.866025	0.866025	0.750000	0.562500	0.421875
12	$\pi/2$	$\pi/3$	1.000000	0.866025	0.866025	0.187500	0.162380
13	$\pi/2$	$\pi/2$	1.000000	1.000000	1.000000	0.062500	0.000000
14	0	$\pi/2$	0.000000	1.000000	0.000000	0.187500	0.000000
15	$\pi/6$	$\pi/2$	0.500000	1.000000	0.500000	0.187500	0.093750
16	$\pi/3$	$\pi/2$	0.866025	1.000000	0.866025	0.187500	0.162380
	$\pi/2$	$\pi/2$	1.000000	1.000000	1.000000	0.062500	0.062500
							1.002011

Catatan : $F_i = \sin x_i \sin y_i$

dy , dengan 9 dan 16 titik integrasi

a. Perhitungan dengan 9 titik polinomial

$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u)$ dimana $F_i = \sin x_i \sin y_i$. Dengan (5.1) hasil eksak 1.0, maka kesalahan metoda numeris adalah $|1.004565 - 1| 100\% = 0.4565\%$. Selanjutnya hasil perhitungan dapat dilihat pada **Tabel 4.1**.

$\frac{\partial u}{\partial t} \bigg|_t = F(u^t)$ **b. Perhitungan dengan 16 titik integrasi**

$\frac{\partial u}{\partial t} \bigg|_{t+\delta t} = F(u^{t+\delta t})$ Adapun hasil perhitungan disajikan pada **Tabel 4.2** di bawah

Dengan hasil eksak 1.0, maka kesalahan metoda numeris adalah $|1.002011 - 1| 100\% = 0.2011\%$.

5. Penggunaan pada Penyelesaian Persamaan Differensial Waktu Orde 1 Nonlinier

Persamaan differensial waktu nonlinier orde 1, dapat ditulis dengan bentuk umum sebagai berikut.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u^t) \quad (5.2a)$$

Penyelesaian secara *explicit* adalah dengan mengerjakan **Persamaan (5.1)** pada saat $t = t$. Jadi $u^{t+\delta t}$ hanya ditentukan oleh kondisi $F(u^t)$ saja.

Penyelesaian secara implisit adalah dengan mengerjakan **Persamaan (5.1)** pada saat $t = t + \delta t$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u^{t+\delta t}) \quad (5.2b)$$

Dalam hal ini harga $u^{t+\delta t}$ ditentukan oleh $F(u^{t+\delta t})$. Jadi baik metoda eksplisit maupun metoda implisit terdapat suatu kekurangan, dimana seharusnya harga $u^{t+\delta t}$ ditentukan oleh $F(u^t)$ dan $F(u^{t+\delta t})$. Untuk mengatasi kekurangan eksplisit dan implisit maka dikerjakan metoda prediktor korektor, yaitu

a. Prediktor

$\partial u / \partial \tau$ dapat dinyatakan dengan skema forward maupun central difference. Dengan **Persamaan (5.2a)** tersebut akan diperoleh harga $u^{t+\delta t}$. Bila diselesaikan dengan central difference, maka **Persamaan (5.2a)** menjadi

b. Korektor

Dengan harga $u^{t+\delta t} =$ (hasil langkah prediktor), dikerjakan skema implisit yaitu

$$\int_{t_0}^{t+\delta t} du = \int_{t_0}^{t+\delta t} F(u) dt$$

Bila diselesaikan dengan *backward difference*, maka **Persamaan (5.4)**

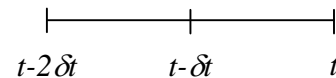
(5.2b) menjadi

$$\int_{t_0}^{t+\delta t} F(u) dt$$

Dengan menggunakan skema *backward difference* pada $\partial u / \partial \tau$, maka akan diperoleh harga $u^{t+\delta t}$ adalah

$$u^{t+\delta t} = u^{t_0} + \int_{t_0}^t F(u) dt \quad (5.5)$$

Dengan harga $u^{t+\delta t}$ yang baru tersebut, diulang langkah korektor, dengan



Gambar 5.1. Integrasi dengan 3 titik polinomial

mengerjakan **Persamaan (5.2b)** dan **(5.2c)** lagi. Langkah ini diulang-ulang sampai diperoleh harga $u^{t+\delta t}$ yang konvergen, dimana

$$u_{pred}^{t+\delta t} = u^{t-2\delta t} + \delta t \left(\frac{1}{3} F^{t-2\delta t} + \frac{4}{3} F^{t-\delta t} + \frac{1}{3} F^t \right) \quad (5.6)$$

$$\text{harga } \delta t \text{ diperoleh dari } \frac{b-a}{2} = \frac{t - (t - 2\delta t)}{2} = \delta t$$

dimana ε adalah bilangan yang sangat kecil.

Metoda prediktor korektor ini, dapat juga dikerjakan dengan cara integrasi yaitu sebagai berikut. **Persamaan (5.1)** dapat juga ditulis dalam bentuk lain yaitu :

$$\partial u = F(t-2\delta t, t-\delta t, t, t+\delta t) dt$$

Gambar 5.2. Integrasi dengan 4 titik polinomial

$$(5.3)$$

Persamaan (5.3) ini dapat diselesaikan dengan metoda integrasi yaitu

$$u^{t+\delta t} = \frac{3}{2} u^{t-2\delta t} + \delta t (0.25 F^{t-2\delta t} + 0.75 F^{t-\delta t} + 0.75 F^t + 0.25 F^{t+\delta t}) \quad (5.7)$$

$$\text{harga } \delta t \text{ diperoleh dari } \frac{b-a}{2} = \frac{t+\delta t - (t-2\delta t)}{2} = \frac{3}{2} \delta t$$

Pada **Persamaan (5.4)** tersebut dt tidak dapat diselesaikan karena $|u_{old}^{t+\delta t} + u_{new}^{t+\delta t}| \leq \varepsilon$. harga $u^{t+\delta t}$ tidak diketahui. Untuk mengatasi hal tersebut, maka dikerjakan metoda prediktor-korektor, sebagai berikut :

a. Prediktor

Sebagai langkah prediktor adalah

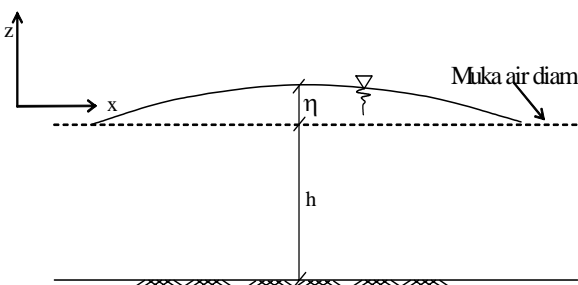
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (uH)}{\partial x} = 0 \quad (5.8a)$$

Integrasi (5.5) dapat diselesaikan dengan polinomial Lagrange 3 titik, yaitu berdasarkan **Gambar 5.1**, dimana $t_0 = t - 2\delta t$.

Dengan diketahuinya $u^{t-2\delta t}$, $u^{t-\delta t}$ dan u^t dari perhitungan sebelumnya, maka dapat dihitung $F^{t-2\delta t} = F(u^{t-2\delta t})$, $F^{t-\delta t} = F(u^{t-\delta t})$ dan $F^t = F(u^t)$, dan $\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial (uH)}{\partial x}$ atau **Persamaan (5.5)** dapat diselesaikan secara numeris dengan koefisien integrasi seperti **Persamaan (5.9a)** yang disebutkan pada **Persamaan (5.9a)** bahwa $F(u, H) = -\frac{\partial (uH)}{\partial x}$ terdahulu.

b. Korektor

Dengan diketahuinya harga $\frac{\partial u}{\partial t} = G(u, \eta)$ maka dapat dihitung $F^{t+\delta t} = F(u^{t+\delta t})$ dan $G(u, \eta) = -u \frac{\partial u}{\partial x} - g \frac{\partial \eta}{\partial x}$ **Persamaan (5.5)** dapat diselesaikan secara numeris



Gambar 5.3. Variabel pada persamaan gelombang Airy

dengan skema 4 titik.

$$\int_{t-2\delta t}^{t+\delta t} \partial n = \int_{t-2\delta t}^t F(u, H) dt + \delta t F^t \quad \text{D e n g a n m e n g g u n a k a n}$$

$$\eta^{t+\delta t} = \eta^{t-2\delta t} + \delta t \left(\frac{1}{3} F^{t-2\delta t} + \frac{4}{3} F^{t-\delta t} + \frac{1}{3} F^t \right) + \delta t F^t$$

k o e f i s i e n

$$F^{t-2\delta t} = -\frac{\partial (uH)^{t-2\delta t}}{\partial x}; F^{t-\delta t} = -\frac{\partial (uH)^{t-\delta t}}{\partial x}; F^t = -\frac{\partial (uH)^t}{\partial x}$$

integrasi dari bab terdahulu, maka penyelesaian numeris dari **Persamaan (5.6)** adalah $\frac{\partial (uH)}{\partial x}$ sebagai berikut

$$\int_{t-2\delta t}^{t+\delta t} \partial u = \int_{t-2\delta t}^t G(u, \eta) dt + \delta t G^t$$

Dengan $u^{t+\delta t}$ yang baru, $G^{t-2\delta t} = \left(-u \frac{\partial u}{\partial x} - g \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^{t-2\delta t}; G^{t-\delta t} = \left(-u \frac{\partial u}{\partial x} - g \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^{t-\delta t}; G^t = \left(-u \frac{\partial u}{\partial x} - g \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^t$ diulang perhitungan korektor **Persamaan 5.7**, sampai dicapai konvergensi dimana:

Sebagai contoh pemakaian akan diselesaikan persamaan gelombang Airy satu dimensi, yaitu [Dean, Dalrymple] :

$$\eta^{t+\delta t} = \eta^{t-2\delta t} + \frac{3}{2} \delta t (0.25 F^{t-2\delta t} + 0.75 F^{t-\delta t} + 0.75 F^t + 0.25 F^{t+\delta t})$$

$$F^{t+\delta t} = -\frac{\partial (uH)^{t+\delta t}}{\partial t} \quad \text{a. Persamaan kontinuitas}$$

b. Persamaan momentum

$$u^{t+\delta t} = u^{t-2\delta t} + \frac{3}{2} \delta t (0.25 G^{t-2\delta t} + 0.75 G^{t-\delta t} + 0.75 G^t + 0.25 G^{t+\delta t})$$

$$\text{dimana } G^{t+\delta t} = \left(-u \frac{\partial u}{\partial x} - g \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^{t+\delta t} \quad \eta = \text{fluktuasi muka air}$$

u = kecepatan arus pada arah x

h = kedalaman perairan

g = percepatan gravitasi

$H = h + \eta$

Persamaan kontinuitas dapat ditulis

Sedangkan persamaan momentum dapat ditulis dalam bentuk

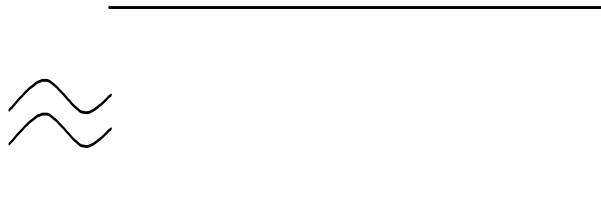
a. Prediktor

a.1. Persamaan kontinuitas

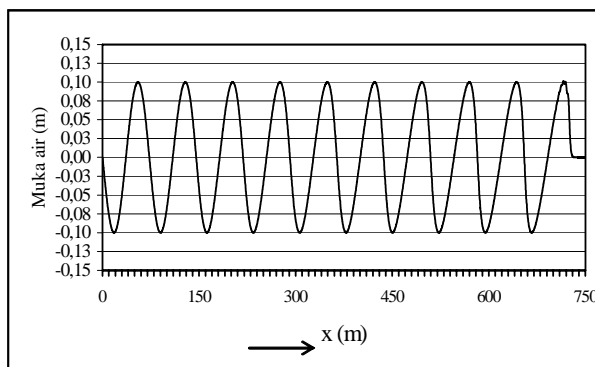
dimana

$(u, H)^{t-2\delta t}$, $(u, H)^{t-\delta t}$, dan $(u, H)^t$, diperoleh dari perhitungan sebelumnya. Sedangkan pada penelitian ini dihitung dengan menggunakan metoda selisih hingga.

a.2. Persamaan momentum



Gambar 5.3. Kanal untuk eksekusi model



Gambar 5.4. Gelombang sinusoidal pada kanal, hasil simulasi

dimana

$u^{t-2\delta t}$, $\eta^{t-2\delta t}$, $u^{t-\delta t}$, $\eta^{t-\delta t}$, u^t dan η^t diperoleh dari hasil perhitungan sebelumnya. Sedangkan $\partial u / \partial x$ dan $\partial \eta / \partial x$ pada penelitian ini dihitung dengan metoda selisih hingga.

b. Korektor

b.1. Persamaan kontinuitas

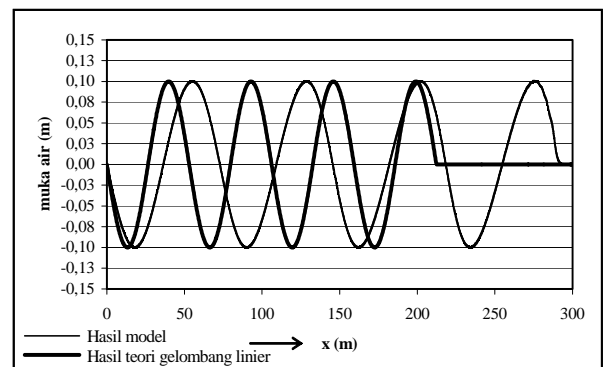
dimana $u^{t-\delta t}$ dan $\eta^{t-\delta t}$ diperoleh dari perhitungan tahap prediktor.

$$\int_{-l}^l f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i^*) \quad \text{b.2. Persamaan momentum}$$

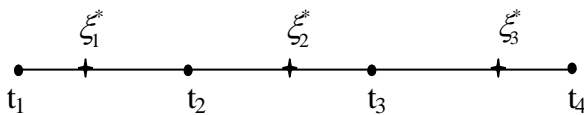
sedangkan $u^{t+\delta t}$ dan $\eta^{t+\delta t}$ diperoleh dari perhitungan pada tahap prediktor.

Sebagai contoh perhitungan, model dikerjakan pada perhitungan gelombang pada kanal (Gambar 5.3). Periode gelombang 6 detik, amplitudo 0.1 m, sedangkan kedalaman kanal $h = 15.0$ m. Berdasarkan kajian Le Mehaute [Mei, Méhauté, 1966], persamaan gelombang Airy ini untuk gelombang pendek hanya dapat digunakan untuk tinggi gelombang yang sangat kecil. Pada perhitungan ini $F(u, H) = -\partial(uH)/\partial x$ dan $G(u, \eta) = -u \partial u / \partial x - g \partial \eta / \partial x$ dihitung dengan menggunakan metoda selisih hingga. Hasil perhitungan disajikan pada Gambar 5.4.

Seperti terlihat pada Gambar 5.4, model memberikan solusi yang stabil, hal ini terlihat pada kurva gelombang yang stabil pada eksekusi 9 x periode gelombang, sering terjadi ketidak stabilan kurva terjadi setelah eksekusi 3 atau 4 kali periode gelombang. Hal



Gambar 5.5. Perbandingan antara teori gelombang linier dengan model



Gambar 6.1. Posisi titik integrasi terhadap titik waktu (ϕ) perhitungan

ini dapat terjadi akibat metoda numeris (penyelesaian diferensial waktu) yang kurang baik. Selain itu perhitungan gelombang pendek dengan persamaan gelombang Airy adalah jauh lebih sulit daripada perhitungan gelombang panjang,

$$u^{t+\delta t} = u^t + \frac{\delta t}{12} (23 G^t - 16 G^{t+\delta t} + 5 G^{t+2\delta t})$$

$$\eta^{t+\delta t} = \eta^t + \frac{\delta t}{12} (23 F^t - 16 F^{t+\delta t} + 5 F^{t+2\delta t})$$

misal gelombang pasang surut dengan periode 24 jam atau 86400 detik.

$$u^{t+\delta t} = u^t + \frac{\delta t}{24} (9 G^{t+\delta t} + 19 G^t - 5 G^{t+\delta t} + G^{t+2\delta t})$$

Solusi

$$\eta^{t+\delta t} = \eta^t + \frac{\delta t}{24} (9 F^{t+\delta t} + 19 F^t - 5 F^{t+\delta t} + F^{t+2\delta t})$$

analitik

berdasarkan teori gelombang linier dapat ditulis dalam bentuk sinusoidal : $\eta(x, t) = A \sin(kx - \sigma t)$

dimana :

$$A = \int_t^{t+\delta t} \frac{\partial u}{\partial t} dt = \int_t^{t+\delta t} f(u) dt \quad \text{amplitudo}$$

gelombang ; $k = \int_t^{t+\delta t} f(u) dt$ bilangan gelombang
 $\sigma = 2\pi / T = \text{frekuensi sudut}$; $T = \text{periode gelombang}$

Untuk gelombang dengan periode 6 detik, dan pada kedalaman perairan 15.0 m, mempunyai panjang gelombang 53 m berdasarkan teori gelombang linier. Terlihat pada **Gambar 5.5.**, bahwa gelombang yang dihasilkan model lebih panjang dari teori gelombang linier. Berdasarkan [Hutahaean, dkk., 2005], panjang gelombang dari teori gelombang linier memang masih perlu dilakukan koreksi.

6. Diskusi

Seperti telah disebutkan bahwa metoda yang dikembangkan adalah serupa dengan metoda Gaussian-quadrature yang berbentuk [Burden, Douglas, 1985]

dimana w_i disebut dengan koefisien bobot, sedangkan ξ_i^* adalah titik integrasi. Berdasarkan [Frank, 1986], titik integrasi pada metoda Gaussian-quadrature adalah seperti disajikan pada **Tabel 6.1.** Seperti terlihat pada **Tabel 6.1.** tersebut, koordinat titik integrasi bukan berupa bilangan yang sederhana, demikian juga dengan intervalnya. Sehingga untuk penggunaannya pada integrasi waktu sulit untuk mengkaitkannya

Tabel 6.1. Titik integrasi pada metoda Gaussian-quadrature

	$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i^*)$	
ξ_1^*		w_i
0.0000000000000000	n = 1	2.0000000000000000
± 0.577350269189626	n = 2	1.0000000000000000
0.0000000000000000	n = 3	0.8888888888888889
± 0.774596669241483		0.5555555555555556
± 0.339981043584856	n = 4	0.652145154862546
± 0.861136311594053		0.347854845137454
0.0000000000000000	n = 5	0.5688888888888889
± 0.538469310105683		0.478628670499366
± 0.906179845938664		0.236926885056189
± 0.238619186083197	n = 6	0.467913934572691
± 0.661209389466265		0.360761573048139
± 0.932469514203152		0.171324492379170

dengan posisi t_1, t_2, t_3, \dots dst. seperti terlihat pada **Gambar 6.1.**, maka terlihat bahwa titik integrasi tidak tepat berada pada titik waktu perhitungan.

Oleh karena itu bila digunakan metoda Gaussian-quadrature, perlu dilakukan interpolasi untuk menghitung harga-harga $f(\xi_1^*), f(\xi_2^*), f(\xi_3^*), \dots$ dst. Hal ini selain menambah proses perhitungan juga akan mengurangi ketelitian. Metoda prediktor-korektor yang dikembangkan mirip dengan metoda prediktor-korektor dari Adams – Bashforth – Moulton yang digunakan oleh Y.S Li, dkk [Li, Liu, Yu, Lai, 1999] serta Nwogu [Nwogu, 1993] dalam menyelesaikan persamaan Boussinesq. Adapun bentuk persamaan dari Adams – Bashforth – Moulton tersebut adalah [Burden, Douglas, 1985], [Li, Liu, Yu, Lai, 1999], dan [Nwogu, 1993].

Prediktor :

Korektor :

Perbedaan dengan metoda yang dikembangkan adalah pada harga koefisien integrasi. Metoda Adams – Bashforth – Moulton ini juga diturunkan berdasarkan metoda integrasi, yaitu

Selanjutnya penyelesaian diselesaikan

metoda backward-difference dari Newton, dan diperoleh koefisien-koefisien integrasi. Untuk penjelasan lebih rinci, dapat dilihat pada ref [Burden, Douglas, 1985]. Mengenai metoda yang mana yang lebih baik, diluar lingkup penelitian ini. Maksud dari paper ini hanyalah mengemukakan alternatif metoda penyelesaian persamaan diferensial waktu nonlinier.

7. Kesimpulan

Dari penelitian yang telah dilakukan, dapat diambil kesimpulan bahwa

- a. Metoda integrasi numeris yang dikembangkan memberikan hasil yang cukup baik, sangat dekat dengan hasil eksak, dengan kesalahan 0.0002% - 0.5%.
- b. Semakin banyak titik polinomial atau titik integrasi yang digunakan diperoleh hasil integrasi yang semakin baik.
- c. Persamaan differensial waktu dapat diselesaikan dengan metoda integrasi, dimana integrasi waktu dapat dilakukan secara numeris.

